Capitolul 5

CALCULUL OPERAŢIONAL
(Transformatele Laplace şi Fourier)

Motto: Când ai mijloacele la îndemână
ceea ce pare complex devine simplu
şi ceea ce-i simplu poate deveni complex

1. Transformata Laplace

Fie $f(x): R_+ \to R$ astfel încât are sens integrala improprie cu parametru

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx \qquad (1)$$

Definiţie. Dacă are sens egalitatea (1), F se numeşte **transformata Laplace** a lui f şi se notează şi $L(f(x))$.

Funcţiile f pentru care există transformata Laplace se numesc **funcţii original** (sau simplu, original), iar transformata Laplace F se mai numeşte **funcţia imagine** (sau scurt imagine).

Definiţie. Funcţia f(x): $I \subset R \to R$ (sau C), I interval mărginit sau nemărginit, este **derivabilă pe porţiuni** dacă pentru orice interval compact $[a,b] \subset I$ există o diviziune $d = (a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b)$, cu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{j-1} < x_j < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

astfel încât f(t) să fie derivabilă pe fiecare interval $\left(x_{j-1}, x_j\right)$ şi să existe limitele laterale

$$f(x_{j-1}+0), f(x_j-0), f'(x+0), f'(x-0),\ j=\overline{1,n}.$$

Definiţie. Se numeşte original o funcţie f(x), reală sau complexă, definită pe mulţimea numerelor reale şi care satisface următoarele condiţii:

1. f(x) = 0 dacă x <),
2. f(x) este derivabilă pe porţiuni,
3. există numerele M > 0, $s_0 \geq 0$ astfel încât

$$\left|f(x)\right| \leq M \cdot e^{s_0 x} \tag{2}$$

Numărul s_0 se numeşte **indicele de creştere al funcţiei** f(x).

Mulţimea funcţiilor original se notează cu O.

Proprietăţile transformatei Laplace:

1. Este liniară; pentru constantele k_1 şi k_2 şi originalele $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ are loc egalitatea

$$L\left(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\right) = k_1 L(f_1(x)) + k(f_2(x)).$$

2. Pentru orice a>0 şi f(x) original are loc egalitatea

$$L(f(ax)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \tag{3}$$

în care **F(p) este imaginea funcţiei f(x)**.

Dacă a > 0 şi f(x) original atunci

$$L(f(x-a)) = e^{-ap} L(f(x)) \tag{4}$$

3. Dacă f(x) este original şi α o constantă atunci

$$L(e^{ax} f(x)) = F(p-\alpha) \tag{5}$$

4. **Teorema de derivare a originalului.** Dacă funcţia original f(x) este de "n" ori derivabilă, cu derivatele continue atunci

$$L\left(f^{(n)}(x)\right) = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0+) - p^{n-2} \cdot f'(0+) - \dots \\ \dots - pf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \tag{6}$$

5. **Teorema derivării imaginii.** Dacă $xf(x), x^2 f(x), \dots, x^n f(x)$ sunt funcţii original atunci derivând egalitatea

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx$$

în raport cu "p", obţinem formulele

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-x)^n f(x) e^{-px} dx,\ n = 0,1,2,\dots \tag{7}$$

6. **Teorema integrării originalului.** Dacă f este original atunci

$$L\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{p} \cdot F(p) \tag{8}$$

7. **Teoremele de integrare a imaginii.** Dacă $\frac{f(x)}{x}$ este original atunci

$$\int_p^{\infty} F(g)dg = L\left(\frac{f(x)}{x}\right) \tag{9}$$

Consecinţe ale proprietăţilor transformatei Laplace.

1. Dacă $\alpha > -1$ şi p >0 atunci

$$L\left(x^{\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \tag{10}$$

In particular, pentru $\alpha = 0$ obţinem $L(x) = \frac{1}{p}$; $\Gamma(1) = 1$.

Pentru $\alpha = k \in N$ obţinem

$$L\left(x^k\right)=\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}=\frac{k!}{p^{k+1}} \tag{11}$$

2. Utilizând teoreme integrării imaginii rezultă

$$\int_0^\infty F(g)dg = L\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\int_p^\infty \frac{f(x)}{x}\cdot e^{-px}\cdot dx \tag{12}$$

şi pentru p = 0 obţinem

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty F(g)dg \tag{13}$$

$$\int_0^\infty F^{(n+1)}(g)dg=(-1)^{n+1}\int_p^\infty x^n\cdot f(x)\cdot e^{-px}dx \tag{14}$$

care pentru p = 0 devine

$$\int_0^\infty F^{(n+1)}(g)dg=(-1)^{n+1}\int_p^\infty x^n\cdot f(x)dx \tag{15}$$

Pentru n = 0, egalitatea (15) devine

$$\int_0^\infty f(x)dx=-\int_0^\infty F'(q)dq=-F(q)\Big|_0^\infty \tag{16}$$

Aplicaţii.

1. Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du=\frac{\pi}{2}$$

Rezolvare. Fie funcţia

$$I(x)=\int_0^\infty \frac{\sin^2 xu}{u^2}du$$

căreia să-i calculăm transformata Laplace.

$$L\left(I(x)\right)=L\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 xu}{u^2}du\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2}\cdot L\left(\sin^2 xu\right)du=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2}L\left(1-\cos 2xu\right)du=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4u^2}\right)du=$$
$$=\frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{du}{4u^2+p^2}=\frac{1}{p^2}\arctan\frac{2u}{p}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2p^2}.$$

Deci

$$L\left(I(x)\right)=\frac{\pi}{2p^2} \qquad \text{şi} \qquad I(x)=\frac{\pi}{2}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 xu}{u^2}du$$

Trecând la limită pentru $x\to 1$ obţinem

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 xu}{u^2}du=\frac{\pi}{2}.$$

2. Integraţi ecuaţia diferenţială, liniară, cu coeficienţi constanţi şi neomogenă

$$y'''9x)-2y''(x)-y'(x)+2y(x)=5\sin 2x$$

cu condiţiile iniţiale $y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=-1.$

Rezolvare. Teorema derivării originalului conduce la

$$L\left(y'''(x)\right)=p^3\cdot Y(p)-p^2\cdot y(0)-py'(0)-y''(0)=p^3Y(p)=p^2-p+1$$
$$L\left(y''(x)\right)=p^2\cdot Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2\cdot Y(p)-p-1$$
$$L\left(y'(x)\right)=pY(p)-y(0)=pY(p)-1$$
$$L\left(y(x)\right)=Y(p)$$

şi $L\left(5\sin 2x\right)=\dfrac{1}{p^2+4}$

Se obţine ecuaţia operaţională

$$\left(p^3 - 2p^2 - p + 2\right)Y(p) - p^2 + p + 2 = \frac{10}{p^2 + 4},$$

din care

$$Y(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{4}\left(\frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\right)$$

Funcţia original corespunzătoare, soluţie a ecuaţiei, are forma

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-x} + \frac{5}{12} e^{2x} + \frac{1}{4} \sin 2x$$

3. Integraţi ecuaţia diferenţială, liniară, cu coeficienţi constanţi şi neomogenă

$$y''(x) + 4y(x) = \sin\frac{3x}{2} \sin\frac{x}{2}$$

şi

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Rezolvare. Ecuaţia se mai poate scrie

$$y''(x) + 4y(x) = -\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos x\right).$$

Ecuaţia operaţională are forma $(p^2 + 4)Y(p) - p = -\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+1}\right)$, din care

$$Y(p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{p}{p^2+1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\left(p^2+4\right)^2}$$

Utilizând teorema derivării imaginii se obţine

$$L\left(x \sin 2x\right) = -\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}$$

iar

$$y(x) = \frac{1}{6} \cos x + \frac{5}{6} \cos 2x + \frac{1}{8} x \sin 2x.$$

$$L(af(x)+bg(x))(p)=\int_0^{\infty}(af(x)+bg(x)e^{-px}dx=a$$
$$=\int_0^{\infty}f(x)e^{-px}dx+b\int_0^{\infty}g(x)e^{-px}dx=aL(F(x))(p)+bL(g(x))(p).$$

1. Proprietăţile de omotetie

$$L(f(ax))(p)=\frac{1}{a}L(f(ax))\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$L(f(x))(ap)=\frac{1}{a}L\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(p),\quad a>0$$

(1) şi (2) pot fi exprimate mai simplu astfel:

$$f(ax)=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$F(ap)=\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right),\ a>0$$

Demonstraţie:

$$L\big(f(ax)\big)(p)=\int_0^{\infty}f(ax)e^{-px}dx=(\text{cu}\quad ax=t)=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}f(t)e^{-\frac{p}{a}t}dt=\frac{1}{a}L(f(x))\left(\frac{p}{a}\right).$$

$$L\big(f(x)\big)(ap)=\int_0^{\infty}f(x)e^{-apx}dx=(\text{cu}\quad ax=t)=\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}L\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(p).$$

2. Prima teoremă de translaţie foloseşte funcţia unitate a lui Heaviside H(x)=0 pentru $x<0$ şi H(x) = 1 pentru $x\geq 0$.

2.1. Prima teoremă de translaţie

$$f(x-a)H(x-a)=e^{-ap}F(p),\quad a>0 \tag{1}$$

Într-adevăr,

$$L(f(x-a)H(x-a))(p)=\int_0^\infty f(x-a)H(x-a)e^{-px}dx=(\text{cu } x-a=t)=$$

$$=\int_0^\infty H(t)f(t)e^{-p(t+a)}dt=e^{-ap}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=e^{-ap}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=e^{-ap}F(p),\quad a>0$$

Dacă relaţia (3) se foloseşte de la dreapta la stânga, trebuie ţinut cont că originalul H(x-a)=0 pentru x < a şi atunci, fără a mai utiliza funcţia unitate avem: $e^{-ap}F(p)=f(x-a)$.

2.2. A doua teoremă de translaţie

$$f(x+a)=e^{ap}\left(F(p)-\int_0^a f(x)e^{-px}dx\right),\ a>0 \qquad (2)$$

Într-adevăr,

$$L(f(x+a))(p)=\left(\int_0^\infty f(x+a)e^{-px}dx\right)=\left(\int_a^\infty f(t)e^{-p(t-a)}dt\right)=$$

$$=e^{ap}\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx-e^{ap}\int_0^a f(x)e^{-px}dx.$$

3. Teorema de deplasare

$$e^{-\alpha x}f(x)=F(p+\alpha),\quad \alpha\in C \qquad (3)$$

$$L\left(e^{-\alpha x}f(x)\right)(p)=\int_0^\infty f(x)e^{-(p+\alpha)x}dx=F(p+\alpha)$$

Din proprietatea a doua de omotetie şi din teorema de deplasare, deci din (2) şi (5), obţinem:

$$e^{-\alpha x}f(\beta x)=\frac{1}{\beta}F\left(\frac{p+\alpha}{\beta}\right) \qquad (4)$$

4. Teorema de derivare a originalului

$$f(x)^{(n)}=p^nF(p)-p^{n-1}f(0+)-\ldots-pf^{n-2}(0+)-pf(n-1)(0+) \qquad (5)$$

valabilă dacă $f\in C^n$ şi are sens $L(f^{(n)}(x))(p)$.

Demonstraţie:

$$L(f(x))(p)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx = f(x)e^{-px} : \%_0 + p\int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx = pF(p)-f(0+)$$

Deci f(x)=p F(p)-f(0+) şi pentru n=1, (7) se verifică. Pentru n = 2 avem:

$f''(x)=(f(x))' = pL(f(x)) - f(0+) =$ (ţinând cont de rezultatul pentru n = 1 obţinem) $= p^2F(p) - pf(0+) - f(0+)$. Pentru n>2 iterăm acest procedeu.

Operaţia de derivare în spaţiul funcţiilor original se transformă în operaţia de înmulţire cu p în spaţiul funcţiilor imagine, abstracţie făcându-se de un polinom în p.

5. Teorema derivării imaginii

În ipoteza că $xf(x), x^2f(x), \ldots x^nf(x)$ sunt funcţii original se poate argumenta posibilitatea derivării sub integrală în raport cu p în relaţia de definiţie:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx$$

Obţinem formulele:

$$(-x)^n f(x) = F^{(n)}(p),\ n=0,1,\ldots) \tag{8}$$

Deci şi acestei operaţii de derivare îi corespunde operaţia de înmulţire cu "x".

6. Teorema integrării originalului

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{p}F(p),\ f \in C^0(R_+) \tag{9}$$

Demonstraţie: Fie $g(x)=\int_0^x f(t)dt$. Cum $f \in C^0(R),\ g \in C^1(R_+)$ şi

g(0+) = 0 (din modul de definire a lui g). $g(x) = pG(p) - g(0+) = pG(p)$

Deci $L(g'(x))(p) = L(f(x))(p) = pG(p) = pL\left(\int_0^x f(t)dt\right)(p)$ de unde (9) are loc.

7. Teorema de integrare a imaginii este dată prin relaţia:

$$\frac{f(x)}{x} = \int_p^{\infty} F(q)dq \tag{10}$$

valabilă când $\frac{f(x)}{x}$ este funcţie original.

Demonstraţie:

$$\int_p^{\infty} F(s)ds = \int_p^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx\right) =$$

$$= \left(\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx\right) = \int_0^{\infty}\left(\frac{f(x)}{x}e^{-sx} \ \left. \right|_{s=\infty}^{s=p}\right)dx =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}e^{-px}dx = L\left(\frac{f(x)}{x}\right)(p).$$

- Din faptul că

$$\sin ax = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad \cos ax = \frac{p}{p^2+a^2}, \ p>0$$

şi din teorema de deplasare: $e^{-\alpha x}f(x) = F(p+\alpha)$ obţinem că:

$$e^{bx}\sin ax = \frac{a}{(p-b)^2+a^2}, \ e^{bx}\cos ax = \frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}, \ a>0, \ b\in R.$$

- Se poate arăta cu ajutorul teoremei de convoluţie că

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q>0 \tag{3}$$

- Cu ajutorul teoremei de integrare a imaginii:

$$\frac{f(x)}{x} = \int_p^{\infty} F(q)dq$$

putem calcula integrale de forma:

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

cu formula:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} F(q)dq$$

Într-adevăr,

$$\frac{f(x)}{x} = \int_p^{\infty} F(q)dq$$

se mai scrie

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot e^{-px} dx = \int_0^{\infty} F(q)dq$$

Făcând p = 0 obţinem relaţia căutată.

a) $\sin x = \frac{1}{p^2+1}$, atunci cu d avem:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

b) pentru a > 0, b > 0

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$$

Într-adevăr, avem:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right) dp = \ln \frac{p+a}{p+b} \Big|_{p=0}^{p=\infty} = -\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}.$$

c) **Integralele lui Froullani**

1. $\int_0^{\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)\sin mt dt = \operatorname{arctg} \frac{b}{m} - \operatorname{arctg} \frac{b}{m} - \operatorname{arctg} \frac{a}{m}, \ a, b, \ m > 0$

2. $\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt = \ln \frac{b}{a}, \ \ a, b > 0$

3. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ax} \sin bx dx = -\operatorname{arctg} \frac{a}{b}, \quad a > 0, b > 0.$

- Cu teorema de deplasare şi faptul că

$x^{n'} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ obţinem că: $x^n e^{\alpha x} = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

Transformata Laplace în calculul operaţional.

a. **Metoda generală a calculului operaţional** constă în următoarele:
- dată o problemă în *spaţiul original*, o transpunem în spaţiul imagine. Se fac calculele algebrice din *spaţiul imagine*. Aplicând inversa transformatei Laplace, sau mai comod, utilizând tabelul " f(x) = F(p) " obţinem soluţia din "spaţiul original ". Calculul operaţional este calculul care utilizează transformata Laplace.

b. **Problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale liniare, cu coeficienţi constanţi, rezolvată operaţional.**

Pentru simplificarea expunerii, prezentăm lucrurile legate de ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea, având coeficienţii constanţi:
$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), a_0 \neq 0,\ a_1, a_2 \in R,\ f(x)$-original, cu problema Cauchy:
$x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x_1, x_0,\ x_1 \in R.$

Soluţie: Utilizând Transformata Laplace, din x(t)=X(p), f(t)=F(p), ecuaţia (original) devine: $\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right) X(p) - \left(a_0 x_0 p + a_0 x_1 + a_1 x_0\right) = F(p)$ numită **ecuaţia operaţională**.

De unde obţinem X(p) şi $x(t) = L^{-1}(X(p))(t).$

Exemple:

b1. Fie ecuaţia : $x'' - 5x' + 6x = e^t$ cu $x(0) = -1,\ x'(0) = 1.$

Arătaţi că $x(t) = \frac{1}{2}e^t - 5e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$

Soluţie: $x'' = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + p - 1;\ e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$

Ecuaţia operaţională este: $\left(p^2 - 5p + 6\right)X(p) = -p + 6 + \frac{1}{p-1}$

Descompunând în fracţii simple obţinem:

$X(p) = -\frac{5}{p-2} + \frac{7}{2(p-3)} + \frac{1}{2(p-1)}$ De unde: $x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{7}{2}e^{3t} - 5e^{2t}.$

b2. $x'' - 4x' + 4x = \sin t$ cu $x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

R: $\left(p^2 - 4p + 4\right)X(p) = p - 2 + \frac{1}{1+p^2}$

$$X(p) = \frac{21}{25(p-2)} + \frac{1}{5(p-2)^2} + \frac{3}{25(p^2+1)} + \frac{4p}{25(p^2+1)}$$

$$x(t) = \frac{21}{25}e^{2t} + \frac{1}{5}te^{2t} + \frac{3}{25}\sin t + \frac{4}{25}\cos t$$

b3. $x'' - 2x' + 2x = t,\ \ x(0) = -2,\ x'(0) = 0.$

R: $X(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p^2} - \frac{5}{2}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{4}{(p-1)^2+1}$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{5}{2}e^t\cos t - 4e^t\sin t$$

b4. $x' + 2x = e^{-t}\left(2\cos 2t + \sin 2t\right),\ \ x(0) = 0$

R: $(p+2)X(p) = \dfrac{2(p+1)}{(p+1)^2+4} + \dfrac{2}{(p+1)^2+4}$

$X(p) = \dfrac{2}{(p+1)^2+1}$ şi $x(t) = e^{-t}\sin 2t$

b5. $x'' = 3y - 3x + 3z,\ y'' = x - t, z'' = -z,\ x(0) = x'(0) = 0$

$y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ z(0) = 1,\ z'(0) = 0.$

R: $p^2X = 3(Y - X + Z),\ p^2Y = X - Y - 1,\ p^2Z = -Z + p$ de unde:

$X = \dfrac{3(p-1)}{(p^2+4)p^2},\ Y = \dfrac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)},\ Z = \dfrac{p}{p^2+1}$

fază în care putem considera problema rezolvată aproape în totalitate (restul calculelor fiind de rutină şi uzură).

c1. Să considerăm iniţial ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + ... + a_ny(t) = b(t) \qquad (1)$$

completată cu valorile date:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

b(t) fiind funcţie original.

Amplificăm ecuaţia (1) cu e^{-pt} şi integrăm în raport cu t de la 0 la ∞.

Notând:

$$Y_{(p)} = \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt$$

transformata Laplace a funcţiei y(t), integrând prin părţi obţinem:

$$\int_0^{\infty} y'(t)e^{-pt}dt = y'(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} y(t)e^{-pt}dt = -y_0 + pY(p)$$

$$\int_0^{\infty} y''(t)e^{-pt}dt = y'(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} y'(t)e^{-pt}dt = -y_1 + p(-y_0 + pY(p)) = \\ = -y_1 - py_0 + p^2Y(p). \tag{3}$$

$$\int_0^{\infty} y^{(n)}(t)e^{-pt}dt = -y_{n-1} - py_{n-1} - p^2y_{n-2} - ... - p^{n-1}y_0 + p^nY(p)$$

Amplificând (3) cu a_k şi însumând obţinem:

$$R_0(p) + R(p)Y(p) = B(p) \tag{4}$$

unde $R_0(p)$ este un polinom în p de grad cel mult n-1, R(p) un polinom de grad n şi B(p) transformata Laplace a lui b(t).

Din (4) obţinem:

$$Y(p) = \frac{B(p) - R_0(p)}{R(p)} \tag{5}$$

Funcţia $\frac{R_0(p)}{R(p)}$ verifică ipoteza teoremei D.a.

Notând $c = \lim_{p\to\infty} \frac{pR_0(p)}{R(p)}$, atunci:

$$\frac{R_0(p)}{R(p)} - \frac{c}{p} = \frac{pR_0(p) - cR(p)}{pR(p)} \tag{6}$$

După cum am luat c, fracţia dată de (6) are numărătorul de grad cel mult n-2 (termenii de grad n-1 reluându-se), iar numitorul de grad n+1, deci diferenţa de grade între numitor şi numărător este de cel puţin 2.

Natura lui B(p) hotărăşte ca funcţia $\frac{B(p)}{R(p)}$ să verifice condiţiile teoremei amintite anterior. Dacă gradul lui R(p) este superior lui 1, este suficient pentru

aceasta, B(p) fiind mărginită, ca b(t) să fie funcţie original, mai precis să satisfacă condiţiile:

$$\left.\begin{array}{lll} |b(t)| < c\ e^{\alpha t} & \text{pentru} & t \geq 0 \\ b(t) = 0 & \text{pentru} & t < 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(orig.)}$$

Dacă gradul lui R(p) este 1, atunci formula (7) din E.a. arată că este suficient ca b(t) să aibă derivată continuă pe porţiuni satisfăcând cu b(t) condiţiile (orig.). Deci dacă sunt îndeplinite condiţiile teoremei E.a. cu formula (3) din acelaşi paragraf găsim:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Y(p)e^{pt}dt = (5) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{B(p)-R_0(p)}{R(p)}e^{pt}dp \qquad (7)$$

c2. Să concretizăm cu ecuaţia de ordinul doi:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = b\sin kt,\ \ y = 0,\ \ y_1 = 0$$

cu rădăcini ale ecuaţiei caracteristice complexe $\lambda = \alpha + i\beta,\ I = \alpha - i\beta,$ cu $\alpha < 0$. În electricitate, o astfel de ecuaţie descrie oscilaţiile forţate într-un circuit R, L, C.

Trecând la transformata Laplace obţinem ecuaţia:

$$\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)Y(p) = \int_0^{\infty} b\sin kte^{-pt}dt = \frac{bk}{k^2 + p^2}$$

Rezolvând obţinem:

$$Y(p) = \frac{bk}{\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)\left(k^2 + p^2\right)}$$

şi cu formula de inversiune obţinem:

$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}}{\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)\left(k^2 + p^2\right)}dp$$

Notând

$$f(p) = \frac{e^{pt}}{\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)\left(k^2 + p^2\right)}$$

punctele singulare sunt $\pm ik$ şi $\alpha \pm i\beta$. Pe postul lui γ putem alege orice număr pozitiv. Pentru a calcula integrala completăm dreapta $\operatorname{Re} p = \gamma$ cu o semicircumferinţă de rază suficient de mare pentru a înconjura toate punctele singulare.

Cu teorema reziduurilor

$$y(t) = 2\pi i \sum \operatorname{Re} z \ f(a_k) =$$
$$= bk\left(\operatorname{Re} z \ f(p)\Big|_{ik} + \operatorname{Re} z \ f(p)\Big|_{-ik} + \operatorname{Re} z \ f(p)\Big|_{\alpha + i\beta} + \operatorname{Re} z \ f(p)\Big|_{\alpha - i\beta} \right)$$

Calculăm reziduul în punctele p_k, p_k fiind poli simpli pentru f, cu formula:

$$\operatorname{Re} z \, f(p_k) = \operatorname{Re} z \frac{A(p)}{B(p)}\Big|_{p_p} = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}$$

Procesul rezultant îl constituie suprapunerea a două oscilaţii – una periodică cu frecvenţa egală cu cea a forţei exterioare şi cealaltă oscilaţie fiind amortizată, viteza de amortizare fiind determinată de α. Pentru $\alpha = 0$ şi β =k obţinem o rezonanţă, iar soluţia va fi o oscilaţie cu amplitudinea infinit crescătoare.

c3. Să considerăm ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pe intervalul $0 \le x \le l$ cu condiţiile iniţiale $u_x(0,t) = 0, u(l,t) = u_1, u(x,0) = u_0$.

Din punct de vedere fizic, aceasta spune că, la momentul t, temperatura nu este aceeaşi în extremitatea iniţială şi în cea finală l, dar ele se menţin constante. În plus, la momentul iniţial, temperatura într-un punct x este u_0.

Aplicând transformata Laplace în t, adică trecând de la funcţia u(x,t) la funcţia:

$$v(x,p) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$$

pentru v(x, p) obţinem: $\frac{d^2v}{dx^2} - pv(x,p) = -u_0$ cu condiţiile iniţiale

$v_x(0,p) = 0, v(l,p) = \frac{u_1}{p}$ (deci o problemă bilocală). Soluţia ei este:

$$v(x,p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\mathrm{ch}\ x\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\ l\sqrt{p}},$$ de unde

$u(x,t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \cdot \frac{\mathrm{ch}\ x\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\ l\sqrt{p}} dp$ care se rezolvă cu teorema reziduurilor.

Istoric. Integrala Fourier apare pentru întâia oară în cartea lui Fourier “Teoria analitică a căldurii“ (1822), unde ea se aplică mai multor probleme de fizică-matematică. Lucrările lui Fourier, ca şi lucrările lui Cauchy care utilizează integrala Fourier în studiul propagării undelor (1842), nu conţin demonstraţii de convergenţă. Transformata Laplace este dezvoltată de Laplace în 1812 în “ Teoria analitică a probabilităţilor “. Independent, Euler, în 1737 consideră integrale ale produsului $e^{-px}f(x)$ pentru a rezolva ecuaţii ordinare. Nici Euler şi nici Laplace nu-şi pun problema utilizării transformatei în planul complex. Inginerul englez Heaviside, începând cu anul 1892, introducând $p = \frac{\partial}{\partial t}$, găseşte soluţii în problemele de electrotehnică care se reduc la ecuaţii cu derivateparţiale. El pune astfel bazele calculului operaţional. Din 1910

Bromwich, apoi Carson, Van der Pol, Doetsch, aplicând transformata Laplace în complex justifică regulile lui Heaviside.

Lucrările lui Denjoy, Carleman, Ostrovski pe clase de funcţii quasianalitice se întind în intervalul 1920-1930.

Cu utilizarea integralei Lebesque, teoria transformatei Fourier se dezvoltă. Cu dezvoltarea teoriei distribuţiilor apare posibilitatea definirii transformatei Fourier prin distribuţii.

(i): f(x) continuă pe porţiuni

(ii): f(x) nu trebuie să crească mai repede ca exponenţiala când $x \to \infty$.

(iii): este îndeplinită pentru $|f(x)| < c\,e^{ax}$ pentru x > M>0 şi în plus, integrala (1) este convergentă pentru $\operatorname{Re}\tau > a$. Într-adevăr,

$$\left|\int_M^\infty f(x)e^{-\tau x}dx\right| < c \int_M^\infty \exp(a - \operatorname{Re}\tau)x\,dx$$

În acest plan, $F(\tau)$ este funcţie analitică. Ea este prelungibilă la tot planul şi singularităţile sale sunt în $\operatorname{Re}\tau \le a$.

Vom stabili legătura naturală între denumire şi notaţie.

Fie deci $f : R_+ \to R$ astfel încât are sens integrala improprie cu parametru

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx,\ p \in R \tag{1}$$

Definiţie. Dacă are sens (1), F se numeşte transformata Laplace a lui f şi se mai notează cu $L(f(x))(p)$.

Transformata fiind definită printr-o integrală improprie, trebuie să stabilim condiţii asupra lui p pentru convergentă. Aceste condiţii sunt corelate cu f. Funcţiile f pentru care există transformata Laplace se numesc **funcţii original** (sau simplu, original), iar transformata Laplace F se numeşte funcţia

imagine (sau scurt, **imagine**). Ca notaţii pentru **legătura original-imagine** pot fi întâlnite:

$f(x)\, 0\text{-}o\, F(p)$ sau $F(p)\, o\text{-}0\, f(x)$, $F(p) \to f(x)$, $f(x) \to F(p)$ sau mai simplu $f(x) = F(p)$, $F(p) = f(x)$.

Preferăm ultima notaţie (putând fi folosite şi altele – după preferinţe şi cu convenţia stabilită fără ambiguităţi).

Numim **funcţie original**, funcţia $f : R \to R$, cu proprietăţile:

(0_1): f este nulă pentru $x < 0$

(0_2): f are **creştere exponenţială**, adică există $x_0 \in R$, a şi $M \in R$, încât

$$|f(x)| \le Me^{ax} \text{ pentru } x > x_0 \tag{2}$$

Pentru p > a integrala (1) care defineşte transformata Laplace este absolut şi uniform convergentă.

Într-adevăr, în condiţiile (2) avem:

$$\left|\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\right| \le \int_0^\infty |f(x)|e^{-px}dx \le$$

$$M\int_0^\infty e^{ax}e^{-px}dx = M\int_0^\infty e^{-(p-a)x}dx$$

Ultima integrală este convergentă pentru p > 0 şi conform criteriului comparaţiei, au loc afirmaţiile făcute.

În plus, să observăm că ipoteza ca $f : R \to R$ nu este esenţială, argumentarea anterioară fiind valabilă şi pentru $f : R \to C$ (în ipoteza (2)).

Cazuri concrete. (d1) Funcţia $f(x) = e^{bx}$, cu b real sau complex va avea creştere exponenţială putând lua a = Reb, M > 1 şi $x_0 \in R$ Într-adevăr,

$$\left|f(x)e^{-ax}\right| = e^{(\mathrm{Re}\, b)x} \cdot e^{-ax} = 1 \le M \tag{1'}$$

$$L(f(x))(p) = \int_0^\infty e^{bx} e^{-px} dx = \int_0^\infty e^{-(p-b)x} dx = \frac{1}{p-b} \qquad (2')$$

Deci $\exp(bx) = \frac{1}{p-b}$ şi $\frac{1}{p-b} = \exp(bx)$, convergenţa integralei având loc pentru p > Reb dacă $p \in R$ şi Rep > Reb dacă $p \in C$.

Observaţie. Nu este greu să vedem că L este liniară. Utilizând liniaritatea, rezultatul din d1 şi relaţiile lui Euler:

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

obţinem:

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad (1')$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad (2')$$

pentru $\mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Im}\,\omega|$.

Proprietatea transformatei Laplace

a. Dacă inegalitatea care exprimă proprietatea de creştere exponenţială este valabilă pentru tripletul (x_0, a', M) pentru orice $a' > a$.

Notând $\alpha = \inf a$, a fiind în tripletul (x_0, a', M), α se numeşte **abscisa de convergenţă a funcţiei f**.

Din cele făcute până acum rezultă că pentru a exista transformata Laplace $L(f)(p)$ este suficient ca f să aibă abscisă de convergenţă $\alpha \in R$ sau

$\alpha = -\infty$ şi transformata are sens pentru $p > \alpha$ în cazul $p \in R$ şi $\operatorname{Re} p > \alpha$ în cazul $p \in C$. Vom nota cu α_f, α_g abscisele de convergenţă pentru f şi g.

b. Pentru $p > \alpha = \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$, are loc proprietatea de liniaritate $af + bg = aF(p) + bG(p)$.